Profesor: Guillermo Corbacho

gcorbach@uc.cl

Estadística

Datos no Agrupados

El presente trabajo es una recopilación, en su muy amplia mayoría, de ejercicios PSU propuestos –de los cuáles muchas veces el alumno se desazona ante el hecho de no saber resolverlos-. Es por ello que he preferido no solo resolverlos a modo de chequeo visual, sino que también por escrito, así como de explicarlos. De este modo, este material pretende ayudar -a modo de consulta- a internalizar los contenidos que van participando en cada solución. Aunque está ideado también para ser consultado por profesores, dado que, según mi experiencia personal, la preparación en la universidad ha sido más orientada a las matemáticas superiores en lugar de las necesidades prácticas de la educación media. Como sería trabajar directamente dichos contenidos y elaborar y planificar instrumentos de evaluación así como de guías, no solo por un período de uno, dos, o a lo más tres semestres, dado que tal período es insuficiente.

Para su presentación, he subdividido los ejercicios en los siguientes temas, por orden de complejidad y creciente dificultad.

Temas:

I. Medidas de Tendencia Central

1.1. Ejercicios de Promedio Aritmético

1. La media aritmética entre los datos: 10 - 15 - 12 - 8 - 4, es:

   A) 7 C) 9 E) 8,9
   B) 8,5 D) 9,8

   Solución:
   $$\bar{x} = \frac{10+15+12+8+4}{5} = \frac{49}{5} = 9,8$$

   Alternativa D).

2. El promedio aritmético de los siguientes puntajes: 12, 15, 23, 18, 32, 48, 9 es:
   A) 61
   B) 20,5
   C) 22,4
   D) 21,4
   E) 25

   Solución:
   $$\bar{x} = \frac{12+15+23+18+32+48+9}{7} = \frac{157}{7} \approx 22,4$$
   Alternativa C).

3. Un alumno tiene dos notas en matemáticas (con escala de 1 a 7). Si el promedio es 5,5 y la suma de las notas es 11; ¿Cuáles son sus notas?
   A) 4,0 y 7,0
   B) 5,5 y 5,5
   C) 5,0 y 6,0
   D) 4,5 y 6,5
   E) Cualquiera de las anteriores

   Solución:
   No se conoce ninguna nota, solo la suma de ellas y su promedio. Pues bien, todas las alternativas desde la A) hasta la D) cumplen con la suma 11 y promedio 5,5.
   Por lo tanto, la alternativa correcta es E).

4. El promedio de los datos de la muestra {x, x +1, x -1, 2x – 1, 2x + 1} es:
   A) x
   B) $\frac{x}{5}$
   C) 7x
   D) $\frac{7x}{5}$
   E) Otro valor.

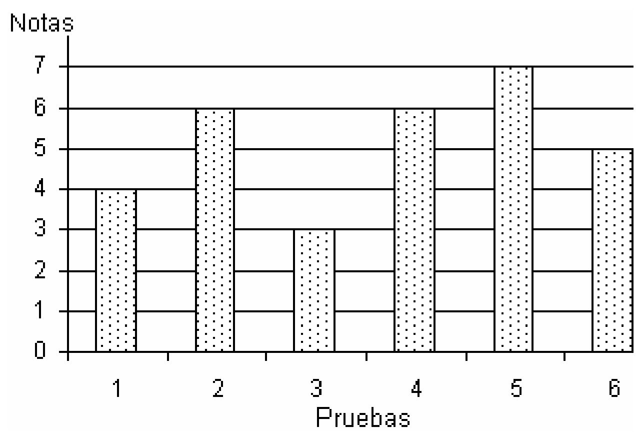
   Solución:
   $$\bar{x} = \frac{x + x + 1 + x - 1 + 2x - 1 + 2x + 1}{5} = \frac{7x}{5}$$
   Alternativa D).

5. Si p es el mayor de tres enteros consecutivos entonces, el promedio de ellos es
   A) p
   B) p – 1
   C) p – 3
   D) 3p
   E) 3p – 1

   Solución:
   Los números son: p-2, p-1, p

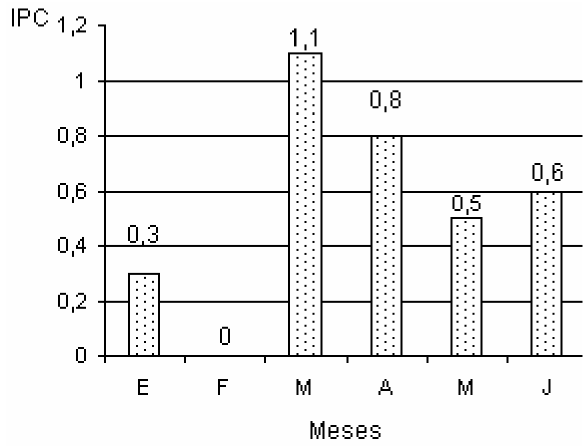
   El término central es también en este caso la media o promedio, esto porque tiene igual cantidad de números en sus costados con igual dispersión o diferencia en torno a el.
   La alternativa correcta es B).

6. El gráfico muestra las seis pruebas parciales obtenidas por un alumno durante el primer semestre. Entonces, el promedio de ellas es:
   A) 5
   B) 5,1
   C) 5,16
   D) $5,1\overline{6}$
   E) 5,2



   Solución:
   $$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 3 + 6 + 7 + 5}{6}$$
   $$= \frac{31}{6} = 5,1\overline{6}$$
   Alternativa D).

7. El gráfico de la figura representa los valores del IPC. (Índice de Precios al Consumidor) del primer semestre de un cierto año, ¿cuál es la media aproximada durante esos meses?
   A) 0,7
   B) 0,6
   C) 0,5
   D) 0,4
   E) 0,3



Solución:
La media viene dada por

$$x = \frac{0,3+0++1,1+0,8+0,5+0,6}{6}$$
$$= \frac{3,3}{6}$$
$$= 0,55$$

Al momento de aproximar la centésima, esta es mayor o igual a cinco, por lo tanto se aproxima la décima a seis y el promedio aproximado es 0,6.
Alternativa B).

8. H es un conjunto de números consecutivos entre –5 y 6, incluyendo ambos números. ¿Cuál es la media aritmética de los elementos de H?

   A) $\frac{6}{11}$ C) $\frac{31}{11}$ E) $\frac{31}{12}$
   B) 0,5 D) 0,6

Solución: Por definición, la media es la suma de los números entre -5 y 6 inclusive, dividido por la cantidad de números que hay entre ambos inclusive.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=-5}^{i=6} i}{N}$$

Donde N = Es la cantidad de datos entre -5 y 6. Todos consecutivos.
= Los números distintos de cero son 6 – (- 5) = 11.
Más otro número que es el cero.
= 12 números en total.

Además, al sumar, los números entre -5 y 5 se anulan mutuamente entre sí, quedando solo el número 6.

Por lo que $\overline{x} = \frac{\sum_{i=-5}^{i=6} i}{N} = \frac{6}{12} = 0,5$.
Alternativa B).

9. Felipe, Paloma y Martina pesan 55, 35 y 18 kilogramos, respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) la media aritmética de sus pesos?

   I) $\frac{55+35+18}{3}$ II) 3(10 + 2) III) $\frac{55}{3}+\frac{35}{3}+6$

   A) Sólo I.
   B) Sólo III.
   C) Sólo I y II.
   D) Sólo I y III.
   E) I, II y III.

   Solución:

   La media viene dada por $\bar{x} = \frac{55+35+18}{3} = \frac{108}{3} = 36$.

   Analicemos cada expresión matemática:

   - $\frac{55+35+18}{3}$ Es la expresión que corresponde a la media. I) es verdadera.
   - $\frac{55}{3}+\frac{35}{3}+6 = \frac{55+35}{3}+6 = \frac{90}{3}+6 = 36$ II) es verdadera.
   - 3(10 + 2) = 30 + 6 = 36 III) es verdadera.

   Alternativa E).

10. Si **x** es la media aritmética de los números **r**, **s** y **t** ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s) ?

    I) $x = \frac{r+s+t}{3}$
    II) (x – r) + (x – s) + (x – t) = 0
    III) $x + 10 = \frac{r+s+t+10}{3}$

    A) Sólo I
    B) Sólo II
    C) Sólo III
    D) Sólo I y II
    E) I, II y III

    Solución: (Analizando cada alternativa).
    I) es verdadera, por definición de media.
    II) $(x - r) + (x - s) + (x - t) = 0$

    $$3x = r + s + t$$

    $$x = \frac{r+s+t}{3}$$

    Que indica que x es la media de r, s y t. Por lo tanto, II) es verdadera.

    III) Vamos a despejar x para ver si adquiere una expresión reconocida de media

    $$x + 10 = \frac{r+s+t+10}{3} \qquad / \bullet 3$$

    $$3x + 30 = r + s + t + 10$$

    $$3x = r + s + t - 20$$

    $$x = \frac{r+s+t-20}{3}$$

    Lo que no corresponde con la definición de media. Luego, es sólo I) y II).
    Alternativa D).

11. La edad promedio de un grupo de 5 amigos es de 17,4 años. Si se incorpora al grupo un amigo de 18 años, ¿cuál es la edad promedio del nuevo grupo?
    A) 17,5 años.
    B) 17,7 años.
    C) 21,0 años.
    D) 5,9 años.
    E) 20,4 años.

    Solución:
    Sean $\bar{x}$ y S la media y la suma de las edades del grupo de 5 amigos.
    Entonces,
    $$\bar{x} = \frac{S}{5}$$
    $$17,4 = \frac{S}{5}$$
    $$17,4 \bullet 5 = S$$
    $$87 = S$$

    Si a la suma de las edades de los 5 alumnos se agrega un amigo de 18 años, la suma final será S' = 87 + 18 = 105

    El promedio de las edades para los ahora seis alumnos es: $\bar{x} = \frac{105}{6} = 17,5$ años.

    Alternativa A).

12. La media aritmética de un conjunto de 8 números es 30. Se agregan al conjunto los números 32 y 18, ¿cuál es la media aritmética de los elementos de este nuevo conjunto?
    A) $26,\overline{6}$
    B) 32
    C) 18
    D) 30
    E) 29

    Solución:
    $$\bar{x} = \frac{S}{8}$$ Donde **S** corresponde a la suma del conjunto de ocho números.
    $$30 = \frac{S}{8}$$
    $$\Rightarrow S = 30 \bullet 8$$
    $$\Rightarrow S = 240$$

    Si se agregan los números 32 y 18 obtendremos 10 números, y su media se obtiene de:

    $$\bar{x} = \frac{S + 32 + 18}{10} = \frac{240 + 32 + 18}{10} = 29$$

    Alternativa E).

13. Cinco amigas se reúnen a almorzar. Si la media aritmética de sus edades es 34 años y las edades de tres de ellas son 28, 30 y 32. ¿Cuál es la media aritmética de las edades de las otras dos?
    A) 40
    B) 50
    C) 60
    D) 70
    E) 80

    Solución:
    Sean A, B, C, D y E las cinco personas. Entonces,
    $$34 = \frac{A+B+C+D+E}{5} \Rightarrow A+B+C+D+E = 34 \bullet 5$$
    $$A+B+C+D+E = 170$$
    Sean D y E las edades desconocidas de las dos personas, entonces, reemplazando las tres edades conocidas en la expresión anterior, tenemos
    $$28+30+32+D+E = 170$$
    $$90+D+E = 170$$
    $$D+E = 80$$
    El promedio de estas dos edades es $\bar{x} = \frac{D+E}{2} = \frac{80}{2} = 40$
    Alternativa A).

14. La media aritmética de tres números es 2n. Si dos de ellos son –4n y 8n, entonces ¿cuál es el tercero?
    A) 10n
    B) 4n
    C) 2n
    D) n
    E) –6n

    Solución:
    Sea x el número buscado. Por definición de media, se tiene.
    $$2n = \frac{-4n+8n+x}{3} \Rightarrow 6n = 4n + x \Rightarrow 2n = x$$
    Alternativa C).

15. El promedio de 3 números es p, si uno de los números es q, otro es 3 veces la mitad de q, ¿Cuál es el valor del tercer número?
    A) $3p-\frac{5}{3}q$
    B) $\frac{3}{2}(2p-q)$
    C) $p-\frac{5}{2}q$
    D) $3p-\frac{5}{2}q$
    E) $p-\frac{5q}{3}$

    Solución:
    Sea x el término buscado. Del enunciado tenemos:
    $$p=\frac{q+3\frac{q}{2}+x}{3}=\frac{\frac{2q+3q+2x}{2}}{3}=\frac{5q+2x}{6} \qquad /\bullet 6$$
    $\Rightarrow 6p=5q+2x$
    $\Rightarrow 6p-5q=2x$
    $\Rightarrow 3p-\frac{5q}{2}=x$
    Alternativa D).

16. Patricia ha obtenido en Matemáticas un promedio semestral de 5,5, con cuatro notas. Si obtuvo dos 6,0 y un 4,8. ¿Cuál fue la cuarta nota?
    A) 5,7
    B) 5,6
    C) 5,5
    D) 5,2
    E) 5,0

    Solución:
    $\bar{x}=\frac{6,0+6,0+4,8+x}{4}$
    $5,5=\frac{16,8+x}{4}$
    $22=16,8+x$
    $5,2$
    Alternativa D).

17. El promedio de los pesos de 4 maletas es de 50 kg. Si los pesos de tres de ellas son 45 kg, 55 kg y 35 kg, respectivamente, ¿cuál es el peso de la cuarta maleta?
    A) 75 kg
    B) 65 kg
    C) 55 kg
    D) 85 kg
    E) 62,5 kg

    Solución:
    Sea x el número buscado. Entonces,

    $$\bar{x} = \frac{45 + 55 + 35 + x}{4}$$
    $$\Rightarrow 4\bar{x} = 45 + 55 + 35 + x$$
    $$\Rightarrow 4 \bullet 50 = 135 + x$$
    $$\Rightarrow 200 = 135 + x$$
    $$\Rightarrow 65 = x$$

    Alternativa B).

    Otra forma:
    El peso total de las maletas equivale a multiplicar por cuatro el peso promedio de las maletas:
    4 • 50 Kg. = 200 Kg.
    Si sumamos el peso de las maletas que nos dan, notamos que es 135 Kg. Falta considerar entonces un peso de 65 Kg.
    Alternativa B).

18. El promedio de siete números es 43. Si tres de los números son 40, 51 y 46, ¿cuál es el promedio de los otros números?
    A) 36
    B) 41
    C) 43
    D) 44
    E) 48

    Solución:

    $\bar{x} = \frac{S}{n}$ Donde S es la suma de los datos.

    $$43 = \frac{S}{7} \Rightarrow S = 43 \bullet 7 = 301$$
    $$40 + 51 + 46 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 301$$
    $$137 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 301$$
    $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 164$$
    $$\bar{x} = \frac{164}{4} = 41$$

    Alternativa B).

19. Un grupo de 4 personas suben un ascensor haciendo una masa promedio de 68 Kg. En uno de los pisos se baja una de ellas y el peso promedio de los que siguen sube a 75 Kg. ¿Cuál es la masa de la persona que se bajó?
    A) 40 Kg.
    B) 47 Kg.
    C) 66 Kg.
    D) 28 Kg.
    E) 7 Kg.

<u>Solución</u>:
Sean A, B, C y D las cuatro personas. Entonces,

$$68 = \frac{A + B + C + D}{4} \Rightarrow A + B + C + D = 68 \bullet 4$$

$$A + B + C + D = 272$$

Sea D la persona que se baja en uno de los pisos, entonces

$$A + B + C = 272 - D \qquad \text{(I)}$$

Además,

$$\frac{A + B + C}{3} = 75 \Rightarrow A + B + C = 225 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando el lado izquierdo de la igualdad (II) por su equivalente del lado derecho de la igualdad (I), obtenemos
$272 – D = 225$
$272 – 225 = D$
$47 = D$
La masa de la persona que se bajó es de 47 Kg.
Alternativa B).

20. En una universidad, el equipo de babyfútol de Arquitectura enfrenta a su similar de Pedagogía -5 jugadores por equipo-. La edad promedio del equipo de Arquitectura es 19 años y el de Pedagogía 25 años.
    En el segundo tiempo se producen los siguientes cambios:
    - En Arquitectura entra un jugador de 22 años y sale uno de 17 años.
    - En Pedagogía sale uno de 25 años y entra uno de 20 años.

    ¿En que razón quedan los promedios de edad después de estos cambios?
    A) 5 : 4
    B) 5 : 6
    C) 3 : 4
    D) 6 : 7
    E) 1 : 1

Solución:

$\overline{x} = \dfrac{S}{n}$ Donde S es la suma de los datos. En este caso, de las edades.

- Para alumnos de Arqueología:

$19 = \dfrac{S_A}{5} \Rightarrow S_A = 19 \bullet 5 = 95$ Donde S_A es la suma de las edades de los alumnos de Arqueología.

Entra uno de 22 y sale uno de 17. Esto es, la suma aumenta en 5 unidades.

$S_A = 100 \Rightarrow \overline{x_A} = \dfrac{100}{5} = 20$

- Para alumnos de Pedagogía:

$25 = \dfrac{S_P}{5} \Rightarrow S_P = 25 \bullet 5 = 125$ Donde S_P es la suma de sus edades.

Sale uno de 25 y entra uno de 20. Es decir, la suma disminuye en 5 unidades.

$S_P = 120 \Rightarrow \overline{x_P} = \dfrac{120}{5} = 24$

La razón entre sus medias es $\dfrac{\overline{x_A}}{\overline{x_P}} = \dfrac{20}{24} = \dfrac{5}{6}$

Alternativa B).

21. En un grupo de 10 niños sus edades son las siguientes. 8; 9; 8; 7; 9; 10; 9; 8; 9 y 11. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) El 40% de los niños tiene menos de 9 años.

II) Los niños de 8 años son el 75% de los que tienen 9.

III) El promedio (media) de sus edades es 9 años.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

<u>Solución</u>:

- Hay 4 edades de un total de 10, que son menores que 9 años. Las que representan el 40% de los niños. Por lo tanto, I) es verdadera.
- Hay 3 niños de 8 años, los que equivalen al 75% de los 4 niños que tienen 9 años. La aseveración II) es verdadera.
- $\overline{x} = \dfrac{8+9+8+7+9+10+9+8+9+11}{10} = \dfrac{88}{10} = 8{,}8$ años.

La alternativa III) es falsa.
Por lo tanto, la alternativa correcta es B).

22. Carlos olvidó una de sus ocho notas del primer semestre. Sin embargo, recuerda las otras siete, que son: 7— 6,2 — 5,8 — 6,5 — 6,3 — 6,1. — 5,6. Y sabe por otra parte que su promedio semestral es 6,1. Recordemos que en el cálculo del promedio semestral, se aproxima o trunca la centésima, por lo tanto, la nota que olvidó es:
    - I) 5,3
    - II) Cualquiera nota dentro del intervalo [4.9 , 5.6]
    - III) 5,7

    A) Solo I
    B) Solo II
    C) I y II
    D) I y III
    E) I, II y III

<u>Solución</u>:
Si se aproxima la centésima, entonces 6,05 ≈ 6,1 y 6,14 ≈ 6,2.
Por lo tanto debemos considerar que el promedio real debe ser cualquier nota perteneciente al intervalo [6.05, 6.14].

Veamos los valores extremos: Sea x la nota que Carlos olvidó.

- Cuando $\bar{x} = 6,05$

$$\frac{7+6,2+5,8+6,5+6,3+6,1+5,6+x}{8} = 6,05$$

$$43,5 + x = 48,4$$

$$x = 48,4 - 43,5$$

$$x = 4,9$$

- Cuando $\bar{x} = 6,14$

$$\frac{7+6,2+5,8+6,5+6,3+6,1+5,6+x}{8} = 6,14$$

$$43,5 + x = 49,12$$

$$x = 49,12 - 43,5$$

$$x = 5,62$$

La nota que olvidó Carlos está en el rango o intervalo [4.9, 5,62[

Las alternativas I) y II) tienen valores que están dentro del intervalo.

Por lo tanto, la alternativa correcta es C).

1.2. Ejercicios de Mediana

23. La siguiente tabla registra –ordenados de mayor a menor- los puntajes por 38 estudiantes en un test de Biología.

Nº	Estudiantes	Calificación	Nº	Estudiantes	Calificación
1	Edgardo S.	112	20	David H.	80
2	Nancy M.	109	21	Eduardo F.	78
3	Carlos B.	106	22	José L.	75
4	Mildred C.	105	23	Rosa M.	75
5	Roberto C.	104	24	Marta V.	75
6	Silvia H.	100	25	Enrique S.	74
7	Jaime D.	97	26	Graciela S.	72
8	Juan D.	97	27	Manuel S.	71
9	Diego F.	95	28	Ricardo G.	70
10	Roberto G.	95	29	Pedro H.	69
11	Dolores T.	93	30	Roberto S.	68
12	Arnoldo T.	91	31	Bárbara B.	66
13	David A.	90	32	Lila S.	62
14	Carmen O.	89	33	Roberto D.	59
15	Roberto B.	84	34	Jorge P.	59
16	Raúl U.	84	35	Rafael P.	58
17	Juan C.	83	36	Gonzalo M.	51
18	Diana D.	82	37	Gabriel G.	47
19	Pablo S.	81	38	Patricio H.	44

Entonces, la mediana de la distribución es:

A) 80,5
B) (112 + 44)/2
C) 75
D) No existe mediana en este caso.
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Como hay un número par de estudiantes (38), la mediana es el promedio de las dos notas centrales (nº 19 y nº 20), es decir:

$$M_d = \frac{81+80}{2} = \frac{161}{2} = 80,5$$

Alternativa A).

24. La mediana de los siguientes datos es: x, x - 1, x + 2, x + 3, x -2

A) x
B) x - 2
C) x + 3
D) x - 1
E) x + 2

Solución:
Al ordenar los términos en forma ascendente x - 2, x - 1, x, x + 2, x + 3.
El valor central corresponde a la mediana y dicho valor central es x.
Alternativa A).

25. La mediana del conjunto de los nueve primeros números primos es:
    A) 7
    B) 9
    C) 11
    D) 13
    E) 15

    Solución:
    Hay que recordar que los números primos son enteros solos divisibles por 1 y por sí mismos. Por cierto, 1 no se considera primo.
    Los primeros nueve primos, ordenados de manera ascendente son:
    2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
    De estos, el término central es 11.
    Alternativa C).

26. Obtenga la mediana de los siguientes datos:
    a, b, c, d, a -2 si b > c > d > a
    A) a
    B) b
    C) c
    D) d
    E) Falta información.

    Solución:
    A la información sobre el ordenamiento de los datos agregamos:
    $$a > a - 2.$$
    Y todos los datos ordenados, de mayor a menor, son:
    b, c, d, a, $a - 2$
    La mediana ocupa el término central de un ordenamiento, y es en este caso el número d.
    Por lo tanto, la alternativa correcta es D).

    La alternativa E) como correcta es un error. Podría creerse que nada afirma que los datos sean cuantitativos, pudiendo ser cualitativos y en tal caso, no habría mediana.
    Pero del momento que hay una relación de orden numérico en los datos, ello hace referencia a una variable cuantitativa, por lo tanto, si la hay.

1.3. Ejercicios Combinados de Mediana con Media

27. De los siguientes datos: $a - 2$, $a + 4$, $a - 3$, la mediana y la media son, respectivamente
    A) $3a - 1$, $a - 2$
    B) $a - 2$, $\frac{3a-1}{3}$
    C) $a + 4$, $\frac{3a-1}{3}$
    D) $3a - 1$, $a + 4$
    E) $a + 4$, $3a - 1$

    Solución:
    Para hallar la mediana, ordenamos de menor a mayor: $a - 3$, $a - 2$, $a + 4$.
    La mediana es el término central: $a - 2$.
    $$\bar{x} = \frac{a - 2 + a + 4 + a - 3}{3} = \frac{3a-1}{3}$$
    La alternativa que tiene a $a - 2$ y $\frac{3a-1}{3}$ es B).

28. Los puntajes obtenidos por 10 alumnos en un examen fueron: 57, 38, 60, 60, 57, 56, 88, 100, 55 y 58. Si se acordó que aprobaran aquellos alumnos cuyos puntajes fueran al menos un punto mayor que la mediana o la media aritmética, ¿cuántos alumnos aprobaron el examen?
    A) 2
    B) 3
    C) 4
    D) 5
    E) 6

    Solución:
    Para obtener la media aritmética o promedio tenemos
    $$\bar{x} = \frac{57+38+60+60+57+56+88+100+55+58}{10}$$
    $$= \frac{629}{10}$$
    $$= 62,9$$
    $$\approx 63$$

    La regla indica que aprueban aquellos que tienen a lo menos un punto más. Esto es, sobre 63 puntos. Hay dos alumnos que están sobre puntaje.

    Mientras que la mediana se obtiene de ordenar de manera ascendente (o descendente) y ver el o los términos centrales.
    38 – 55 – 56 – 57 – 57 – 58 – 60 – 60 – 88 – 100

    La mediana viene dada por el promedio de los valores centrales, (57+58)/2 = 57,5 ptos.
    Los alumnos que están sobre el puntaje y con un punto de diferencia (esto es, a partir de 57,5 + 1 = 58,5 ptos.) son cuatro alumnos.

    El conectivo "o" hace referencia al criterio más amplio, tal como lo es una unión de conjuntos o de criterios. A diferencia del conectivo "y", que considera a conjuntos y criterios más pequeños. En nuestro caso, tenemos criterios que consideran a dos o cuatro alumnos. Entre estos, el criterio más amplio son cuatro alumnos.
    Alternativa C).

1.4. Ejercicios de Moda

29. La frecuencia que presenta la moda de la muestra {2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 7, 7} es:
    a) 2
    b) 3
    c) 4
    d) 5
    e) 7

Solución:
La moda es 4, pues se repite un mayor número de veces que los otros números. La frecuencia con la cual se repite es 3.
Alternativa B).

30. La moda de la siguiente muestra $\frac{a-1}{1-a}$, $-1, 2, 3, -(x+2)^{o}$
    A) -1
    B) 2/5
    C) 2
    D) 3
    E) No tiene moda la muestra.

Solución:
El primer y último dato tienen expresiones interesantes.
El primer dato es $\frac{a-1}{1-a} = \frac{-(1-a)}{1-a} = -1$
El último dato es $-(x+2)^{o} = -1$ (por propiedad $a^0 = 1$. En este caso el signo menos está fuera de la base y de la influencia del exponente cero). Por lo tanto, la muestra está compuesta por:

-1, -1, 2, 3, -1

Y el dato que más se repite es -1.
Por lo tanto, la moda es tal valor y la alternativa correcta es A).

1.5. Ejercicio Combinados de Moda con Mediana

31. Se considera el siguiente conjunto: {2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18, 20}. La moda y la mediana son, respectivamente:
    A) 9 y 7
    B) 9 y 9
    C) 5 y 10
    D) 12 y 9
    E) 9 y 20

    Solución:
    La moda es el valor que más se repite, que en el conjunto es el valor 9.
    Una vez ordenado un número impar de datos –de manera ascendente o descendente, el valor central es la mediana. En nuestro conjunto de trece datos, el valor central lo ocupa el séptimo dato, que es 9.
    Alternativa B).

1.6. Ejercicios Combinados entre Media, Mediana y Moda

32. Los datos siguientes corresponden al tiempo en minutos que un trabajador debe esperar su medio de movilización para ir al trabajo durante quince días laborales:

20, 5, 12, 8, 5, 8, 4, 10, 3, 8, 6, 18, 2, 10, 14.

Entonces la Media, la Mediana y la Moda para este conjunto de datos son respectivamente:

	Media	Mediana	Moda
A)	$8,8\overline{3}$	8	8
B)	8	$8,8\overline{6}$	8
C)	$8,8\overline{6}$	5	10
D)	$8,8\overline{6}$	8	8
E)	8,5	8	10

Solución:

La suma de todos los tiempos de espera es 133 mm., por lo que su promedio es:

$$\bar{x} = \frac{133}{15} = 8,8\overline{6}$$

Ordenamos de menor a mayor los quince tiempos de espera para obtener la mediana:

2 – 3 – 4 – 5 – 5 – 6 – 8 – 8 – 8 – 10 – 10 – 12 – 14 – 18 - 20

La Mediana es el valor de la variable que ocupa la posición central.

En este caso, M_d = 8.

El valor que aparece con mayor frecuencia es la moda, de manera que Mo = 8.

Por lo tanto, los datos pedidos son:

$8,8\overline{6}$; 8; 8

Alternativa D).

33. Si a la serie de datos 7 — 6 — 5 — 4 — 5 se le agregaran dos datos, entonces su Mediana seria 6, su Promedio 7 y su Moda 5. Los datos que se deben agregar podrían ser:

I. 5 y 17
II. 9 y 13
III. 8 y 14

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) II y III

Solución:

- Una vez que se han agregado dos datos a la serie, el conjunto tendría 7 datos. Si el promedio de los datos debe ser 7, entonces la suma de todos los datos debe ser 49. Como la suma de los 5 datos originales es 27, los dos datos que se agreguen deben sumar la diferencia: 49 – 27 = 22.
- Además, si se ordena la serie:

4 – 5 – 5 – 6 – 7.

Para que 6 sea la mediana, los datos que se agreguen deben ser mayores o iguales que 6.

Solamente las alternativas II) y III) satisfacen tales condiciones.

La opción correcta es E).

34. a, b y c representan respectivamente la media, la mediana y la moda de las alturas de 10 personas, tal que b < a < c. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?
    A) Hay más personas cuyas alturas son mayores que a.
    B) La persona más alta tiene estatura c.
    C) a es el promedio de b y c.
    D) La persona más baja tiene estatura menor que a.
    E) Si todas las personas estuviesen ordenadas ascendente o descendentemente, la persona del medio tendría estatura a.

<u>Solución</u>:
Fíjese que da lo mismo si las estaturas fuesen de personas, caballos, etc. Lo que importa es la comparación entre sí de la media, la mediana y la moda, dentro de una muestra.
La afirmación que tiene sentido, si los números de la muestra no son todos iguales, es que existirá algún valor por lo menos, que será menor que la media. Con mayor si este fuese el menor valor.
Alternativa D).

35. Entre los valores de una muestra siempre está presente:
    I) La media.
    II) La moda.
    III) La mediana.

    A) Sólo I.
    B) Sólo II.
    C) Sólo III.
    D) I y III.
    E) Ninguna.

<u>Solución</u>:
A través de un simple contraejemplo, abordaremos cada una de las alternativas.
Dada la muestra 1, 2, 3 y 4.

- $\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$ Valor que no se halla en la muestra. I) es falsa.
- La muestra no tiene moda. Por lo tanto, II) es falsa.
- La mediana viene dada por el promedio de los términos centrales
  $M_D = \frac{2+3}{2} = 2,5$ que como vimos y vemos, no se halla en la muestra. Por lo tanto, III) también es falsa.

Alternativa E).

36. ¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) verdadera(s)?
    I) La moda es el valor central de los datos.
    II) La media es siempre menor que la moda.
    III) Puede haber más de una moda en un grupo de datos.

    A) Sólo I.
    B) Sólo II.
    C) Sólo III.
    D) I y II.
    E) Ninguna de las anteriores.

<u>Solución</u>:
Analicemos cada afirmación.

- El valor central de los datos es la mediana, no la moda. I) es falsa.
- Mostremos a través de un contraejemplo, un caso en que la media no es menor que la moda:

0, 1, 1, 3, 5 La moda es 1 y la media es 10/5 = 2. II) es falsa.

- Aunque no sea siempre ni necesario, puede haber más de una moda en una muestra.

Ejemplo: 0, 1, 1, 3, 3 Las modas son 1 y 3. III) es verdadera.

Sólo III) es verdadera. Alternativa C).

1.7. Ejercicios de Cuartiles

37. Los cuartiles Q_1, Q_2, Q_3 del siguiente conjunto de números
{8, 12, 14, 21, 24, 32, 33, 44, 47, 48}
son respectivamente:

	Q_1	Q_2	Q_3
A)	44	28	14
B)	14	28	44
C)	14	32	47
D)	12	24	44
E)	8	28	48

Solución:
Notemos que los valores están numéricamente ordenados.
Son número par de valores, por lo que la mediana (que es el segundo cuartil, Q_2) será el promedio de los dos valores centrales: $Q_2 = \frac{24+32}{2} = 28$
Q_1 será la mediana del conjunto de valores menores que $Q_2 = 28$.
{8, 12, 14, 21, 24} son número impar de valores, por lo que su mediana es directamente el valor central, 14.
Así, $Q_1 = 14$.
No es necesario proseguir, si miramos las alternativas, solo B) cumple con los dos primeros cuartiles hallados.
Si queremos finalizar por hallar el tercer cuartil, Q_3, este será la mediana de los valores mayores que la mediana de todo el conjunto de datos, esto es, mayores a $Q_2 = 28$.
{32, 33, 44, 47, 48} son número impar de valores, por lo que su mediana es directamente el valor central, 44. Esto es, $Q_3 = 44$.

Los valores buscados son $Q_1 = 14$, $Q_2 = 28$, $Q_3 = 44$.

Alternativa B).

38. El rango intercuartil de los datos: 3,46 5,27 6,33 6,88 7,21 9,82 12,63 es:
    A) 9,17
    B) 3,42
    C) 5,75
    D) 4,55
    E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
El rango intercuartil viene dado por la diferencia entre el mayor y menor cuartil. Por lo tanto debemos hallar los cuartiles.
Notemos que los valores están numéricamente ordenados.

Se tiene número impar de datos, por lo que la mediana (que es el segundo cuartil, Q_2) viene dado directamente por el valor central. $Q_2 = 6,88$.

Q_1 será la mediana del conjunto de valores menores que $Q_2 = 6,88$.
3,46 5,27 6,33 son número impar de valores, por lo que su mediana es directamente el valor central 5,27.
Así, $Q_1 = 5,27$.

Si queremos finalizar por hallar el tercer cuartil, Q_3, este será la mediana de los valores mayores que la mediana de todo el conjunto de datos, esto es, mayores a $Q_2 = 6,88$.
7,21 9,82 12,63 son número impar de valores, por lo que su mediana es directamente su valor central, 9,82. Esto es, $Q_3 = 9,82$.

Los cuartiles son $Q_1 = 5,27$ $Q_2 =6,88$ $Q_3 = 9,82$.

Así, el rango intercuartil es $R_{IC} = 9,82 – 5,27 = 4, 55$
Alternativa D).

2. Medidas de Dispersión

2.1. Ejercicios de rango con medidas de tendencia central

39. Se registra el tiempo X que una muestra de 7 estudiantes emplea en responder una prueba. La información es la siguiente, en minutos: X: 40, 25, 28, 37, 30, 51, 34
Al respecto, es posible afirmar que, en la muestra:

I: El tiempo mediano de respuesta fue de 37 minutos.

II: El rango de tiempo de respuesta fue de 26 minutos.

III: El tiempo medio de respuesta fue de 35 minutos.

Es (son) correcta (s):
A) Sólo I.
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

Solución:
Al ordenar los datos, tenemos: 25, 28, 30, 34, 37, 41, 51. El término mediano es el dato central en tal ordenación, esto es, 34 minutos. I) es falsa.

El rango viene dado por la diferencia entre los valores extremos: 51 – 25 = 26 minutos. II) es verdadera.

El tiempo medio viene dado por el promedio de los tiempos. $\bar{x} = \dfrac{40+25+28+37+30+51+34}{7} = \dfrac{245}{7} = 35$ III) Es verdadera.

Luego, como II) y III) son verdadera, la alternativa correcta es D).

40. Se tienen los números $\sqrt{18}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{32}$. Entonces:

I) Su mediana es igual a su media aritmética.

II) Su media aritmética es $3\sqrt{2}$.

III) Su rango es $2\sqrt{2}$

Es (son) correcta(s):
A) Sólo I.
B) Sólo II.
C) Sólo I y II.
D) Sólo II y III.
E) I, II y III.

Solución:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Notemos que}: \sqrt{18} = \sqrt{9\bullet 2} = 3\sqrt{2}\\ \sqrt{8} = \sqrt{4\bullet 2} = 2\sqrt{2}\\ \sqrt{32} = \sqrt{16\bullet 2} = 4\sqrt{2}\end{array}\right\} \bar{x} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{3} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}.$$

La media es $3\sqrt{2}$ y si ordenamos de menor a mayor los números, notaríamos que $3\sqrt{2}$ estaría al medio en tal ordenación.
I) y II) son verdaderas.

El rango es la diferencia entre el mayor y menor término y en nuestro caso es:
$4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
III) es verdadera. Por lo tanto, la alternativa correcta es E).

41. El número de televisores vendidos diariamente por una multitienda durante una semana es: x = 18, 13, 12, 16, 24, 10.
    Es posible afirmar que:
    I) El promedio de televisores vendidos en la semana es de 15,5 diarios.
    II) El número mediano de televisores vendidos en la semana es de 14,5.
    III) El rango en el número de televisores vendidos diariamente es de 14 televisores.

    Es(son) verdadera(s):
    A) Sólo I.
    B) Sólo I y II.
    C) Sólo I y III.
    D) Sólo II y III.
    E) I, II y III.

Solución:
Analicemos cada afirmación.

- El promedio viene dado por $\bar{x} = \frac{18+13+12+16+24+10}{6} = \frac{93}{6} = 15,5$

  I) es verdadera.
- Si ordenamos en orden ascendente la cantidad de televisores vendidos tenemos
  10, 12, 13, 16, 18, 24
  Como tenemos una cantidad par de datos, la mediana viene dada por el promedio de los datos centrales, $\frac{13+16}{2} = 14,5$

  II) es verdadera.
- El rango de televisores vendidos es la diferencia entre la mayor cantidad y el menor valor de televisores vendidos: 24 – 10 = 14.
  III) es verdadera.

Por lo tanto, la alternativa correcta es E).

2.2. Ejercicios de Desviación Estándar con medidas de tendencia central

42. Si en un conjunto de datos todos ellos tienen el mismo valor, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones respecto de esos datos es(son) siempre verdadera(s)?
    I) La media aritmética es cero.
    II) La desviación estándar es cero.
    III) Mediana – Moda = 0.

    A) Sólo I.
    B) Sólo II.
    C) Sólo I y II.
    D) Sólo II y III.
    E) I, II y III.

    Solución:
    Analicemos cada una de las alternativas.
    I) Que todos los valores sean iguales no implica que la media y todos los datos sean cero. Esto último no siempre se puede afirmar. Por lo tanto, I) es falsa.
    II) Como todos los datos son iguales, no hay desviación alguna respecto a la media. Por lo tanto, II) es verdadera.
    III) Mediana – Moda = 0
    $\Rightarrow$ Mediana = Moda
    Como todos los datos son iguales, la diferencia entre la mediana y la moda es cero. Por lo tanto, III) es verdadera.
    Siendo II) y III) verdaderas, la alternativa correcta es D).

43. Si en una muestra, la media es igual a la moda y a la mediana, siempre se verifica que:
    I. Los datos son iguales.
    II. La desviación típica o estándar es 0.
    III. La muestra tiene un solo dato.

    A) Sólo I
    B) I y II
    C) I y III
    D) I, II y III
    E) Todas son falsas.

    Solución:
    Analicemos cada alternativa a través de un contraejemplo:
    I) es falsa. En la muestra de valores
    $$1 - 1 - 3 - 3 - 3 - 5 - 5$$
    Tenemos que la media es igual a la moda e igual a la mediana y no todos los datos son iguales.
    II) es falsa, pues la media es 3 y hay valores distintos a ella, por lo que la desviación típica es distinta de cero.
    III) es falsa, el contraejemplo que se presenta no tiene un solo dato.

    Por lo tanto, la alternativa es E).

El ejercicio que se presenta a continuación es distinto al anterior en la afirmación III).

44. Si en una muestra la media, moda y mediana son iguales, siempre se verifica que:
    I. Los datos son iguales.
    II. La desviación típica o estándar es 0.
    III. La moda es por lo menos uno de los datos de la muestra.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

Solución:
Analicemos cada alternativa a través de un contraejemplo:
En la muestra de valores

$$1 - 1 - 3 - 3 - 3 - 5 - 5$$

Tenemos que la media es igual a la moda e igual a la mediana y no todos los datos son iguales.
Por lo tanto, I) es falsa.
Con esto se descartan las alternativas A), D) y E).
Nos quedan las alternativa B) y C).

La media es 3 y hay valores distintos a él, por lo que la desviación típica es distinta de cero.
Por lo tanto, II) es falsa.
Con esto se descarta la alternativa B).
Nos queda únicamente la alternativa C).

2.3. Ejercicio de Desviación Media

45. La desviación media para el conjunto de datos {3, 7, 10, 12} es:
    A) 8
    B) 3
    C) 5
    D) -4
    E) 0

Solución:

La desviación media viene dada por $DM = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\left|x_i - \overline{x}\right|}{n}$. Claramente se requiere el cálculo de la media primero.

$\overline{x} = \frac{3+7+10+12}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Luego, $DM = \frac{|3-8|+|7-8|+|10-8|+|12-8|}{4} = \frac{5+1+2+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Alternativa B).